TD5.

Exercice 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) * f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues.

* en $(x,y)=(0,0)$. Vérifier que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

remarque : on a utilisé le fait que $|y| < \|(x,y)\|_2$ ...

$\therefore$ f est C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

2) oui on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{sinon.} \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{sinon.} \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3) * sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles existent et sont continues.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* en $(0,0)$ les dérivées partielles ne sont pas continues :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2} \not\to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 .$$

$\therefore$ f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) * $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ et donc f est diff. en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* en $(0,0)$. Si f est différentiable la diff doit être ~~nécessairement~~ égale à $h \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Mais

$$h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$$

car $h(x,x) = \dfrac{1}{2^{3/2}} \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$

f n'est pas diff en $(0,0)$.

Exercice 2 :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}^c$

Montrer que U est ouvert : Plusieurs argument possibles :

① $\{y=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$: il est donc fermé et U est alors ouvert.

② Soit $u_n = (x_n, y_n)$ où $y_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et u_n cv.

on a $u_n = (x_n, 0) \longrightarrow (x_0, 0) \in U^c$

$\therefore$ U est ouvert (complémentaire d'un fermé).

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme composé de fonctions $\mathcal{C}^1$ et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.

2) Etude de la continuité de f :

* sur U : f est $\mathcal{C}^0$ produit, composition de fonctions $\mathcal{C}^0$.

* sur U^c : Pour montrer que f est $\mathcal{C}^0$ en $(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on cherche une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $u(x,0) = 0$

$$|f(x,y) - f(x,0)| < |u(x,y)|$$

on a si $(x,y) \in U$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = \left| y^2 \sin \frac{x}{y} - 0 \right| < y^2$$

si $(x,y) \in U^c$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = 0$$

prendre $u(x,y) = y^2$.

$\therefore f$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

3) Sur U^c la fonction f est Cte $= 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+x,0) - f(x,0)}{h} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} k \sin\left(\frac{x}{k}\right) = 0. \end{cases}$$

4) Il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ en tout pt $(x,0)$:

$$\left| y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(x,0)]{} 0.$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

5) On montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(1,0)$ en remarquant que $\cos\left(\frac{1}{y}\right)$ n'a pas de limite en $y \to 0$.

Exercice 2 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

1) on a bien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ car

$$|f(x,y)| \leq \frac{2\,\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = 2\,\|(x,y)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

f est $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

2) Il faut revenir à la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

les dérivées partielles existent et $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3) on calcule les dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on vérifie qu'elles sont continues en $(0,0)$;

* $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, y & \text{sinon.} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6\,\|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < 6\,\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[qd\ (x,y)\to(0,0)]{} 0.$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) f est bien diff sur $\mathbb{R}^2$ car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1) $m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$m(p,q) \longmapsto p^5 q^3$

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\underbrace{d_a m}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \underbrace{\frac{\partial m}{\partial p}(a)}_{\in\mathbb{R}}\, \underbrace{d_a p}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{\partial m}{\partial q}(a)}_{\in\mathbb{R}}\, \underbrace{d_a q}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \underline{\underline{\text{linéaire}}}$$

où $\begin{cases} d_a p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (h,k) \longmapsto d_a p(h,k) = h \\ d_a q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (h,k) \longmapsto d_a q(h,k) = k \end{cases}$

Ainsi si $a = (p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$

$$d_a m(h,k) = \underbrace{5p_0^4 q_0^3}_{\in\mathbb{R}}\, h + \underbrace{3p_0^5 q_0^2}_{\in\mathbb{R}}\, k \in \mathbb{R}$$

et la différentielle est l'application.

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$a \longmapsto d_a m = \left((h,k) \longmapsto d_a m(h,k)\right)$$

que l'on note (abusivement!)

$$dm = 5p^4 q^3\, dp + 3p^5 q^2\, dq$$

2) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha \beta^2 \cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \beta^2 \cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \gamma) = 2\alpha\beta\cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = -\alpha\beta^2 \sin(\gamma)$$

La différentielle en $a = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est :

$$\underbrace{d_a g}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} = \underbrace{\beta_0^2 \cos(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}}\, d_a\alpha + \underbrace{2\alpha\beta_0 \cos(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}}\, d_a\beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$+ \underbrace{-\alpha_0 \beta_0^2 \sin(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}}\, d_a\gamma.$$

Ainsi la différentielle est noté :

$$dg = \beta^2 \cos(\gamma)\, d\alpha + 2\alpha\beta\cos(\gamma)\, d\beta + \alpha\beta^2 \sin(\gamma)\, d\gamma$$

Exercice 4 :

1) $g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = xy \cos(xy)\, e^{y^2}$

2) $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}(x,y) = y e^{y^2}\left(\cos(xy) - xy \sin(xy)\right)$

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial y}(x,y) = x\left(\cos(xy)\, e^{y^2} - xy \sin(xy)\, e^{y^2} + 2y^2 \cos(xy)\, e^{y^2}\right)$$

3) Matrices jacobiennes :

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ 0 & 1 \\ e^{y^2} & 2xy\, e^{y^2} \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v,w) = [vw \; , \; uw \; , \; uv]$$

et

$$J_g(f(x,y)) = [xy\, e^{y^2} \; , \; x\cos(xy)\, e^{y^2} \; ; \; y\cos(xy)$$

Ainsi on a

$$J_{g\circ f}(x,y) = \left[xy\,e^{y^2},\ x\cos(xy)e^{y^2},\ y\cos(xy) \right] \begin{bmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ 0 & 1 \\ e^{y^2} & 2xy\,e^{y^2} \end{bmatrix}$$

$$= \Big[\underbrace{y e^{y^2}\big(-xy\sin(xy) + \cos(xy)\big)}_{= \frac{\partial g\circ f}{\partial x}(x,y)} ;\ \underbrace{x\big(-xy\sin(xy)e^{y^2} + \cos(xy)e^{y^2} + 2y^2\cos(xy)\,e^{y^2}\big)}_{= \frac{\partial g\circ f}{\partial y}(x,y)} \Big].$$

Exercice 5 :

On note $\Psi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

et :

$$g(r,\theta) = f\circ\Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

* $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial}(r,\theta)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin(\theta)$$

* $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r,\theta)$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, r\cos\theta$$

$$\begin{cases} \partial_r g(r,\theta) = \partial_x f \cos\theta + \partial_y f \sin(\theta) \\ \partial_\theta g(r,\theta) = \partial_x f\, r\sin\theta + \partial_y f\, r\cos\theta \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \, \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{1}{r} \sin\theta \, \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \, \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r} \cos\theta \, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \end{cases}$$

$$\text{et} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

Exercice 6

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$$

1)

$$J_\varphi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \\ -2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ\varphi}(x,y,z) = \left[J_f(\varphi(x,y,z))\right]\left[J_\varphi(x,y,z)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)), \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)), \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(\varphi(x,y,z))\right] J_\varphi(x,y,z)$$

$$= 2\left[x\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)) - x\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(\varphi(x,y,z)),\right.$$
$$-y\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)) + y\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)),$$
$$\left.-z\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)) + z\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_3}(x,y,z)\right]$$

2) $\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) = 2t\left[\cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(0,0,0)} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(0,0,0)}\right]$

$+ \quad \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) = 2t\left[\cancel{-\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(0,0,0)} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(0,0,0)}\right]$

$+ \quad \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 2t\left[\cancel{-\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(0,0,0)} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(0,0,0)}\right]$

$= \quad 0.$

Exercice 7 : $\quad f(x,y) = x e^{y} + y e^{x}$

1) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

on est dans les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Il existe une fonction φ définie dans V un voisinage de 0 tq

$$\varphi(0) = 0$$

$$g(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in V.$$

remarque : on admettra que φ est (au moins) $\mathcal{C}^2$ sur V.

2) Par définition on a $\forall x \in V$:

* $g(x) = f(x, \varphi(x)) = 0$ ce qui donne $x e^{\varphi(x)} + \varphi(x) e^{x} = 0$

$$\Rightarrow g(0) = \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(0) = 0}$$

* comme $g(\cdot)$ est l'appli cte égale à 0 on a

$g'(x) = 0$ ce qui donne : $g'(x) = e^{\varphi(x)} + x \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + \varphi'(x) e^{x} + \varphi(x) e^{x}$

$$\Rightarrow g'(0) = \quad + \varphi'(0) + \underset{=0}{} = 0$$

$$\text{et} \quad \boxed{\varphi'(0) = -1}$$

* dérive une deuxième fois:

$g''(x) = 0$ ce qui donne :

$$g''(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + x (\varphi'(x))^2 e^{\varphi(x)} + x \varphi''(x) e^{\varphi(x)} + \varphi''(x) e^{x} + \varphi'(x) e^{x} + \varphi'(x) e^{x} + \varphi(x) e^{x}$$

$$g''(0) = -1 - 1 + 0 + 0 + \varphi''(x) - 1 - 1 + 0$$

$$\text{et} \quad \boxed{g''(0) = 4}$$

En résumé on a :

$$\varphi(x) = 0 - x + \frac{4}{2} x^2 + o(|x|^2)$$

$$= - x + 2 x + o(|x|^2) .$$

Exercice 8. $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2}$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (point critique).

Le th. des fonctions implicites ne s'applique pas en ce point.

(on a tout de même $f(0,0) = 0$)

2) Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$.

* on a bien $x \mapsto f(x,0) = 0$ et l'axe des x noté $\mathcal{C}$ est dans Γ.

* Soit $y \neq 0$: $x^2y + \ln(1+y^2) = 0$

ssi $x^2y = -\ln(1+y^2)$

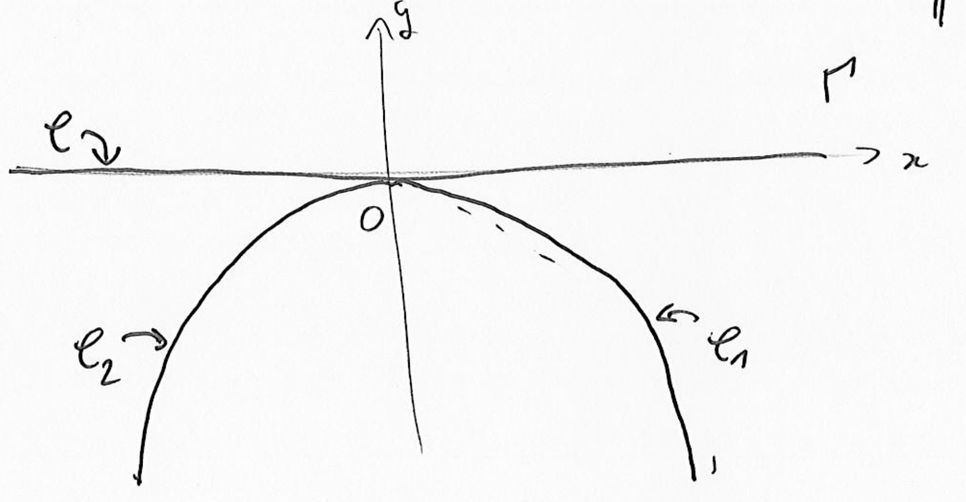
implique que $y < 0$ et

$$x^2 = \frac{-\ln(1+y^2)}{y}$$

les points correspondant sont sur la courbe : $\mathcal{C}_1$:

$$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \left(\sqrt{\frac{\ln(1+t^2)}{t}}, -t\right)$$

et sa symétrique $\mathcal{C}_2$ par rapport à l'axe Oy.



Exercice 9 :

1) (*) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 \end{cases}$

Soit f une solution de (*) et $y \in \mathbb{R}$ fixé. On pose

$$g(x) = f(x,y)$$

par (1) on a $g'(x) = xy^2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \underbrace{c(y)}_{cte}$

où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Par (2)

on a $c'(y) = 0$

et
$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A \qquad \text{où } A \in \mathbb{R}.$$

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + e^x & (2) \end{cases}$

Même méthode : $g(x) = f(x,y)$ où $y \in \mathbb{R}$ fixé

(1) $\Rightarrow$ $g'(x) = e^x y$ et $g(x) = ye^x + c(y)$

où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. On pose $h(y) = f(x,y) = ye^x + c(y)$

(2) $\Rightarrow$ $h'(y) = 2y + e^x$ et $c'(y) = 2y$

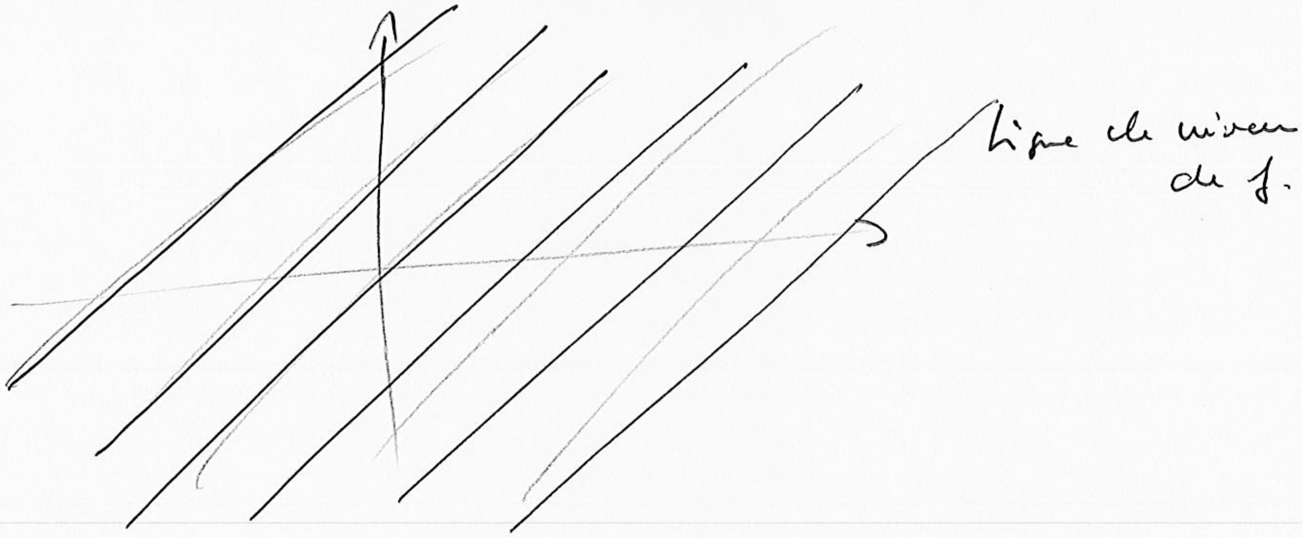
et
$$f(x,y) = ye^x + y^2 + A \qquad \text{où } A \in \mathbb{R}.$$

~~3) Idem~~

~~$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$ où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.~~

Exercice 10.

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f(x+t, y+t) = f(x, y)$ (*)



on dérive par rapport à t :

$$\frac{d}{dt} f(x+t, y+t) = 0 \qquad \text{(règle de la chaîne)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) \times \underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}(t)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}(t)}_{=1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{par } (*) .$$

2) $$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

$$F(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$$

et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \overbrace{\frac{\partial (u+v)/2}{\partial u}}^{= 1/2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \overbrace{\frac{\partial (u-v)/2}{\partial u}}^{= 1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = 0 .$$

3) La question précédente nous apprend que F ne dépend que de v : $\exists\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$F(u,v) = g(v)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = g(x-y)$$

Réciproquement : si f s'écrit $f(x,y) = g(x-y)$ avec g une fonction C^1 alors on a bien

$$f(x+t,\, y+t) = f(x,y) \qquad \forall x,y,t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 :

On pose en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

On a vu à l'exo 5 que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{cases}$$

Ainsi

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \cancel{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}}\right)$$
$$+ r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \cancel{\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}}\right)$$

$$= r\frac{\partial g}{\partial r}$$

et l'équation $(*)$ devient $\dfrac{\partial g}{\partial r} = 1$. $\forall r > 0$.

il existe $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ (car $x>0$) $\mathcal{C}^1$ et tq

$$g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\operatorname{Arctan} \frac{y}{x}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad \exists \ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1$ tq

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$